

基于模糊理论的 2 维隶属划分 Renyi 熵分割算法

刘锁兰^{1),2)} 杨静宇²⁾

¹⁾(江苏工业学院信息科学与工程学院,常州 213164) ²⁾(南京理工大学计算机科学与技术学院,南京 210094)

摘要 基于信息论中最大熵原理,提出了一种 2 维直方图模糊划分 Renyi 熵分割算法。首先介绍了模糊划分的原理,由于 Renyi 熵是 Shannon 熵的广义形式,因此用模糊概率和条件概率来定义模糊划分 Renyi 熵。然后在向量空间内搜索最优参数组合,利用隶属函数实现图像分割。选用 3 幅不同类型的图像进行 MATLAB 仿真实验,结果表明该方法对噪声及杂散点等干扰的抑制性能较理想,且显著优于对比方法所得结果。

关键词 直方图 Renyi 熵 模糊 隶属函数

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)02-0323-05

Segmentation Approach Based on Fuzzy Theory and Renyi Entropy of 2D Membership Partition

LIU Suo-lan^{1),2)}, YANG Jing-yu²⁾

¹⁾(School of Information Science & Engineering, Jiangsu Polytechnic University, Changzhou 213164)

²⁾(School of Computer Science & Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract Based on the maximum entropy principle, a new segmentation approach of fuzzy partition Renyi entropy of two-dimensional histogram is proposed. First, the concept of fuzzy partition is introduced. In view of the Renyi entropy as a generalized form of Shannon entropy, fuzzy probability and conditional probability are used to define the fuzzy Renyi entropy. Then, in sample space the optimal pair of parameters is searched. Finally, image segmentation is realized using membership functions. Experiments are conducted on three real object pictures by MATLAB. Results show that the proposed approach does good control performance to noise and interference. And it's better than other contrast methods.

Keywords histogram, Renyi entropy, fuzzy, membership functions

1 引言

图像分割是图像处理领域中极为重要的内容,也是自动目标识别的重要组成部分。图像分割的应用非常广泛,如对医学图像的分割能自动地描绘出医学图像中感兴趣的区域;对交通图像进行分析和对雷达图像进行目标分解等等。图像分割的正确性和自适应性在一定程度上影响着目标检测和识别的智能化程度^[1-2]。但是现有分割算法的研究大多数

是针对具体问题,到目前为止还没有一种适合于任何图像的分割算法。在众多的分割方法中阈值法因其实现简单、计算量小、性能较稳定等优点被广泛采用。学者们提出了众多的阈值化分割方法,其中基于信息熵进行阈值选取是最受欢迎的方法之一^[3-5]。在 20 世纪 80 年代初,Pun^[4-5]首次考虑采用信息论中熵的概念进行图像分割的阈值选取,但是该方法过于复杂而不便理解。随后 1982 年 Johannsen 和 Bille 提出了一种利用信息测度来度量图像分割中的目标信息和背景信息的相关程度并要

基金项目:国防基础研究基金项目(J1500C002);国家自然科学基金重点项目(60632050)

收稿日期:2007-01-25;改回日期:2007-07-31

第一作者简介:刘锁兰(1980~),女,讲师。2008 年于南京理工大学获计算机应用技术专业博士学位。主要研究方向为图像处理、模式识别。E-mail: vinyar@163.com

求最小的方法来选取阈值^[6]。显然它比 Pun 的方法有效。Kapur等人在 1985 年又提出了最大熵阈值法^[7]。考虑到对数运算花费的时间较长,10 年后, Yen 等人在 Kapur 方法的基础上提出了基于最大相关准则的阈值方法^[8]。由于这些熵阈值法都是基于系统内部均匀性假设,且仅利用了图像灰度概率信息,因而所得的阈值对图像分布的依赖性低,使得其应用面广,但是也有局限性。对于 1 维灰度直方图,由于受噪声干扰严重,使得许多情况下目标和背景的分布相互重叠不可区分,导致 1 维直方图分割方法的前提不再成立,因而 Kapur 的最大熵阈值法不能获得满意的分割效果。由于图像中像素与其邻域像素间存在较大的相关性,当利用了像素空间相关信息后,目标和背景的分布就会比 1 维直方图更容易区分,1989 年 Abutaleb 基于这种观点提出了 2 维直方图最大熵阈值法^[9]。

另外,考虑到图像的亮度、边界和区域等均具有模糊性,因此可用模糊集来描述图像。最大模糊熵阈值法是按照最大模糊熵准则,利用图像的灰度特征来选择若干个灰度阈值,把图像中的每个像素划分到合适的类别中从而实现图像分割。Pal 等人先后在 1981 和 1983 年提出了模糊阈值法^[10-11],引入了灰度图像的模糊熵概念,利用穷举法寻求模糊熵最小时所对应的模糊参数,从而确定分割阈值。后来,Cheng 等人提出一种基于模糊划分的最大熵阈值法,但该方法限定了隶属函数为降半梯形函数、梯形函数和升半梯形函数^[12]。

因此,本文提出了一种基于模糊理论的 2 维隶属划分 Renyi 熵分割新算法。由于 Renyi 熵是 Shannon 熵的广义表达形式,因此该方法将基于 2 维直方图的模糊划分条件概率约束到 Renyi 熵表达式。根据最大熵原理在向量空间内搜索最优参数,利用隶属函数实现图像分割。最后选用几幅真实图像进行比较实验,结果表明该方法所得的结果要明显优于文献中所提方法,能够将目标主体分割出来。

2 模糊划分 Renyi 熵

1948 年 Shannon 把熵的概念引入信息论,熵作为一个随机事件的不确定性量度或信息量的量度有效地促进了信息论的发展。有关于 Shannon 熵的定义,设随机变量 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, z_k (可以是灰度值、区域灰度、梯度等特征) 的概率密度函数 $p_k =$

$P(Z = z_k), k = 1, 2, \dots, n$ 。则 Shannon 熵的表达如下:

$$H_S(Z) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \quad (1)$$

Renyi 熵是 Shannon 熵的广义形式^[13]:

$$H_R(Z) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{k=1}^n (p_k)^\alpha \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1 \quad (2)$$

与 Shannon 熵不同的是,Renyi 熵引入了一个可以调节的参数 α ,对信息的度量更具有一般性和灵活性。特别地,当 $\alpha \rightarrow 1^-$ 时, $H_R(Z) \rightarrow H_S(Z)$ 。

设概率空间 (Ω, E, p) ,其中 Ω 为样本空间, E 是指 Ω 上全体普通子集构成的集合, $p: E \rightarrow [0, 1]$ 为概率测度。若 X 是概率空间上的一个模糊事件,则其概率为 $p(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dp$ 。如果 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ 是可列集,并且有 $p_i = p(\{\omega_i\})$,那么,

$$p(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X(\omega_i) p_i \quad (3)$$

假设 X 和 Y 均为概率空间 (Ω, E, p) 上的模糊事件,那么 X 对 Y 的条件概率可以作如下描述:

$$p(X|Y) = p(XY)/p(Y) \quad (4)$$

设图像有 L 个灰度 $G = \{G_k\}, (0 \leq k \leq L - 1)$ 且 $G_k = k$,直方图为 $h(k), k = 0, 2, \dots, L - 1$ 。令 $\Omega = G, p$ 为灰度出现的概率且 $p(\{k\}) = h_k$,则 X 出现的概率为 $p(X) = \sum_{k=0}^{L-1} u_A(k) h_k$ 。 $u_A(k)$ 为隶属函数,表示灰度 k 对 X 的隶属程度。因而,当 X 出现时灰度 k 出现的条件概率为

$$p(\{k\} | X) = u_A(k) h_k / p(X) \quad (5)$$

设 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subset \mathbf{R}^\tau, \tau$ 为空间维数, $S_k = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{k\tau}\}^T \subset \mathbf{R}^\tau$ 为特征矢量, S_{kj} 为观测 S_k 的第 j 个特征。因此,对 S 的模糊划分即为将 S 分为 m 个模糊子集 M_i , 满足 $\sum_{i=1}^m u_{ik} = 1, \forall S_k \in S, 2 \leq m \leq n$, 其中 $u_{ik} = u_i(S_k) \in [0, 1]$ 为 M_i 的隶属度函数。

设 $P = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 为对任意 $S \subset \mathbf{R}^\tau$ 的一种模糊划分, Y 是概率空间 (S, E, p) 上的模糊事件。则给定 Y 时模糊划分 P 的条件 Renyi 熵^[14]:

$$\begin{aligned} H_R(P|Y) &= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=1}^m (p(X_i|Y))^\alpha \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=1}^m \left(\frac{p(X_i Y)}{p(Y)} \right)^\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

构造序列 $N_i = \{S_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, 显然 $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ 是对 S 的一种模糊划分,称 N

为对 S 的无约束模糊划分。因此,当模糊事件 Y 给定时,对 S 无约束模糊划分 N 的 Renyi 熵为

$$H_R(N | Y) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=1}^n (p(N_i | Y))^\alpha$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=1}^n \left(\frac{p(N_i Y)}{p(Y)} \right)^\alpha \quad (7)$$

由上述分析可给出如下定义:设 $P = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 是对任意有限集 S 的一种模糊划分。 $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ 是对 S 的无约束模糊划分,则模糊划分 P 的 Renyi 熵为

$$H_R(P) = \sum_{i=1}^m H(N | X_i)$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{p(N_j X_i)}{p(X_i)} \right)^\alpha \quad (8)$$

3 2 维隶属划分

在理想的图像中,灰度直方图一般是双峰的,此时将目标从背景中分割出来的最佳阈值就是直方图双峰间的谷。然而在大多数情况下待分割图像的直方图表现为多峰或单峰,因此要直接寻找一个合适的阈值存在很大困难。为此研究者们利用像素空间相关信息构造2维灰度直方图^[9,13]。

设图像有 L 级灰度 $G_x = \{G_{xk}\} (0 \leq k \leq L-1)$, 其 $s \times s$ 邻域也有 L 级灰度 $G_y = \{G_{yk}\} (0 \leq k \leq L-1)$, 则2维灰度直方图:

$$h(i, j) = \text{Prob}\{f(x, y) = i \text{ and } g(x, y) = j\} = h_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq L-1 \quad (9)$$

假设图像由目标域 O 和背景域 B 组成,其隶属度函数分别用 Z 函数和 S 函数表示。扩大到2维空间,可以得到如下表达式:

$$u_{ox}(i; m, n) = \begin{cases} 1 & 0 < i \leq m \\ 1 - \frac{(i-m)^2}{(n-m)((m+n)/2-m)} & m < i \leq (m+n)/2 \\ \frac{(i-n)^2}{(n-m)(n-(m+n)/2)} & (m+n)/2 < i \leq n \\ 0 & n < i \leq L-1 \end{cases} \quad (10)$$

$$u_{oy}(j; t, s) = \begin{cases} 1 & 0 < j \leq s \\ 1 - \frac{(j-s)^2}{(t-s)((t+s)/2-s)} & s < j \leq (t+s)/2 \\ \frac{(j-t)^2}{(t-s)(t-(t+s)/2)} & (t+s)/2 < j \leq t \\ 0 & t < j \leq L-1 \end{cases} \quad (11)$$

式中, $m, n \in i, s, t \in j$ 为任意点,并且满足 $u_{ox}(i; m, n) + u_{bx}(i; m, n) = 1, u_{oy}(j; s, t) + u_{by}(j; s, t) = 1$ 。可见,参数对 (m, n, s, t) 控制隶属函数的形状。 u_{ox} 与 u_{bx}, u_{oy} 与 u_{by} 联合对2维空间作如下模糊划分:

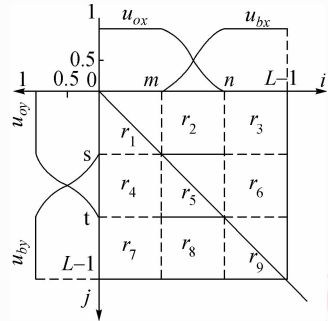


图1 2维隶属模糊划分
Fig. 1 2D fuzzy membership partition

因而可得到如下4个模糊子集: $OO = r_1 \cup r_2 \cup r_4 \cup r_5, OB = r_4 \cup r_5 \cup r_7 \cup r_8, BO = r_2 \cup r_3 \cup r_5 \cup r_6, BB = r_5 \cup r_6 \cup r_8 \cup r_9$ 。令目标域 $O = OO$, 背景域 $B = OB \cup BO \cup BB$, 分别计算 O 和 B 的隶属函数:

$$u_o(i, j) = u_{ox}(i; m, n) u_{oy}(j; s, t) \quad (12)$$

$$u_B(i, j) = u_{ox}(i; m, n) u_{by}(j; s, t) + u_{bx}(i; m, n) \times u_{oy}(j; s, t) + u_{bx}(i; m, n) u_{by}(j; s, t) \quad (13)$$

由于区域 OB 和 BO 反映的是图像中的噪声点、边缘点及杂散点,其概率极小,因此在计算时可以忽略,从而得到:

$$u_B(i, j) \approx u_{bx}(i; m, n) u_{by}(j; s, t) \quad (14)$$

因此可得目标和背景的总概率:

$$p(O) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} u_o(i, j) h_{ij}$$

$$p(B) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} u_B(i, j) h_{ij} \quad (15)$$

令样本空间 $\Omega = G_x \times G_y$, 显然 $P = \{O, B\}$ 是对 Ω 的一种模糊划分。构造集列 $N_{ij} = \{[i \ j]^T\}, i, j = 0, 1, \dots, L-1$, 则 $N = \{N_{00}, \dots, N_{(L-1)(L-1)}\}$ 是对 Ω 的无约束模糊划分。

此时根据式(7),分别得到给定 O 和 B 时无约束模糊划分 N 的 Renyi 熵表达式:

$$H(N | O) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{p(N_{ij} O)}{p(O)} \right)^\alpha$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{u_o(i, j) h_{ij}}{p(O)} \right)^\alpha \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 H(N | \mathbf{B}) &= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{p(N_{ij} | \mathbf{B})}{p(\mathbf{B})} \right)^\alpha \\
 &= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{u_B(i, j) h_{ij}}{p(\mathbf{B})} \right)^\alpha \quad (17)
 \end{aligned}$$

进一步可得模糊划分 \mathbf{P} 的 Renyi 熵:

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{P}) &= H(N | \mathbf{O}) + H(N | \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{1 - \alpha} \left(\ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{u_O(i, j) h_{ij}}{p(\mathbf{O})} \right)^\alpha + \right. \\
 &\quad \left. \ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{u_B(i, j) h_{ij}}{p(\mathbf{B})} \right)^\alpha \right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

此时, 图像的最优分割即在 $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ 空间内寻找最佳参数对 $(m, n, s, t, \alpha)^{[15]}$, 使得式 (18) 取最大:

$$\begin{aligned}
 (m^*, n^*, s^*, t^*, \alpha^*) &= \arg \max_{\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}} \{H(\mathbf{P})\} \\
 &= \arg \max_{\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}} \left\{ \frac{1}{1 - \alpha} \left(\ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{u_O(i, j) h_{ij}}{p(\mathbf{O})} \right)^\alpha + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \ln \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} \left(\frac{u_B(i, j) h_{ij}}{p(\mathbf{B})} \right)^\alpha \right) \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

由于参数空间 $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ 是巨量的, 如果使用穷举法搜索参数的最优组合, 则存在计算复杂度、占用存储空间大的弱点, 不利于在工程实际中应用。因此, 根据文献 [16]、[17] 的快速递归算法, 使其计算复杂度由原先的 $O(L^4)$ 降为 $O(L^{8/3})$ 。一旦模糊划分 $\mathbf{P} = \{\mathbf{O}, \mathbf{B}\}$ 确定了, 就可以根据最大隶属

原则对图像中各像素进行分类。

4 实验分析与结论

为对算法的分割有效性进行验证, 选用 3 幅真实图像进行比较实验。实验结果如图 2 所示。所选用图像直方图分别表现为双峰、多峰和单峰。

前人的大量实验表明利用 Renyi 熵分割时, 当 α 取值在 0 ~ 1 之间, 分割效果最佳且阈值相近, 因此取 $\alpha = 0.25, 0.5$ 和 0.75 作为实验参数进行比较实验。

图 2 中, (a) 的参数为图像大小, (c), (f), (g), (h) 为隶属参数, (d), (e) 为阈值参数。

在图像分割领域, 目标被分割的完整性和精确度是衡量一种分割方法性能是否优越的重要准则^[18]。因此, 这里采用绝对误差率作为主要的比较准则。令 n_0 为理想情况下得到的目标像素个数, n_i 为图 2 中 (c) ~ (h) 分割所得到的目标像素的个数。令 n_{diff}^i 为采用第 i 种分割方法所得到的绝对误差, 则

$$n_{diff}^i = |n_i - n_0| \quad (20)$$

设图像大小为 $M \times N$, 即总的像素个数为 $M \times N$ 。 r_{err}^i 为第 i 种分割方法所得到的绝对误差率, 则

$$r_{err}^i = \frac{n_{diff}^i}{M \times N} \times 100\% \quad (21)$$

上述实验中各方法提取的像素个数, 以及绝对

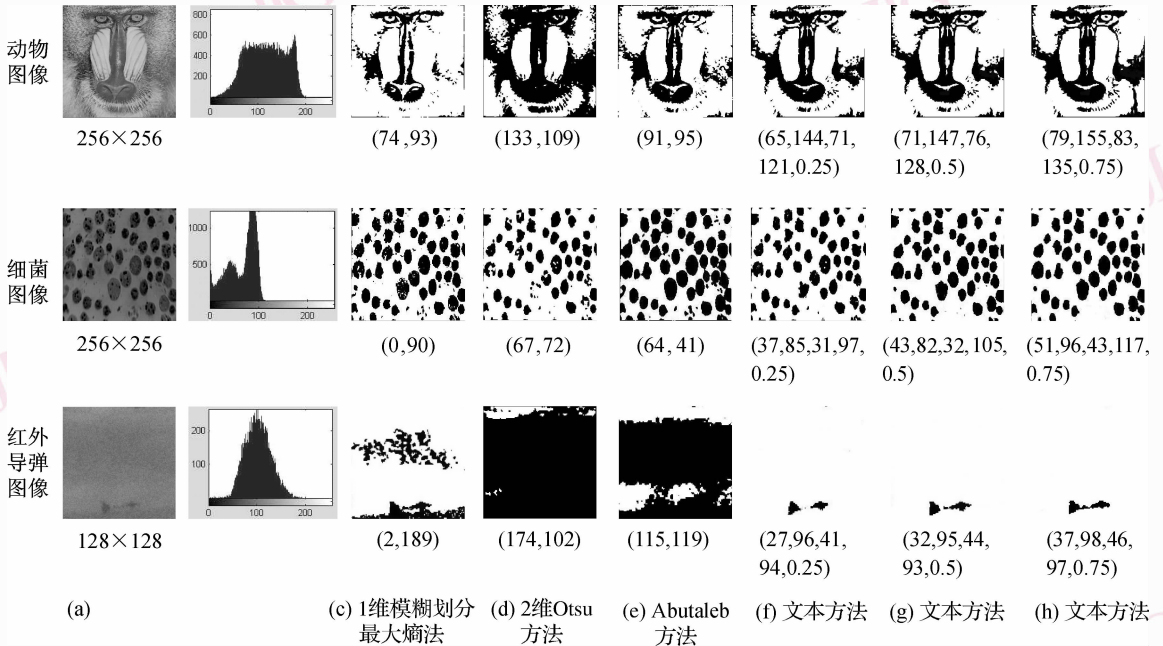


图 2 实验图像分割结果

Fig. 2 Segmentation results of test images

误差率如表1所示。

从对比实验可以看出,无论图像直方图表现为何种形式,以及目标占整幅图像比例大小,本文方法分割的结果都要明显优于其他3种算法,能够将目标的主体分割出来。1维模糊划分最大熵方法受噪声干扰严重。2维Otsu方法在目标较大时可以将目标分割出来,但当目标较小时分割效果差,尤其在含有噪声时目标信息完全丢失,分割缺陷严重。图2中动物图像和细菌图像的分割显示出本文方法与Abutaleb方法分割效果最接近,但本文方法效果更

好,Abutaleb方法在目标较小时也失效,这主要是因为本文方法利用了熵的广义形式并结合条件概率定义2维模糊划分Renyi熵,从而准确反映出图像的信息量。参数 α 的应用对信息的度量更具有一般性和灵活性,实验发现在0到1范围内随着 α 的增大分割出的目标完整性越佳,绝对误差率越低,提取的有效像素数与参数值更接近。利用2维隶属函数来分割图像,不但增强了适应性,而且对噪声及杂散点等干扰的抑制性能也更强。

表1 图2中各测试图像采用不同分割方法得到的像素数及绝对误差率的比较

Tab.1 Comparison of extracted pixels and error ratio for the images shown in Fig.2

图像类别	图像大小	参考像素数	提取的像素总数和绝对误差率(%)											
			1D Fu. pa. entropy		2D Otsu		Abutaleb		本文算法(0.25,0.5,0.75)					
			pixels	r_{err}	pixels	r_{err}	pixels	r_{err}	pixels	r_{err}	pixels	r_{err}	pixels	r_{err}
动物	256 × 256	6 183	1 740	6.78	11 093	7.49	3 106	4.7	3 500	4.09	3 710	3.77	4 456	0.64
细菌	256 × 256	5 749	5 536	0.33	4 056	2.58	6 568	1.25	4 069	2.57	4 278	2.24	5 515	0.36
导弹	128 × 128	97	729	3.86	15 897	96.44	12 685	76.83	81	0.49	95	0.012	103	0.04

参考文献 (References)

- Sezgin M, Sankur B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation [J]. Journal of Electronic Image, 2004, **13**(1): 145-165.
- Milan S, Vaclav H, Roger B. Image Processing, Analysis and Machine Vision[M]. Beijing: People's Posts & Telecommunications Publishing House, 2003: 83-127. [Milan S, Vaclav H, Roger B. 图像处理、分析与机器视觉[M]. 艾海舟, 吴勃等译. 北京: 人民邮电出版社, 2003: 83-127.]
- Ferrario M, Signorini M G, Magenes G, et al. Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1980, **26**(1): 26-37.
- Pun T. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram [J]. Signal Processing, 1980, **2**(1-2): 223-237.
- Pun T. Entropy thresholding, a new approach [J]. Compute Graphics and Image Processing, 1981, **16**(3): 210-239.
- Johannsen G, Bille J. A threshold selection method using information measures [A]. In: Proceedings of the 6th International Conference on Pattern Recognition [C], Munich, Germany, 1982: 140-142.
- Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for gray level picture thresholding using the entropy of histogram [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1985, **29**(3): 273-285.
- Yen J C, Chang F J, Chang S. A new Criterion for automatic multilevel thresholding [J]. IEEE Transactions on Image Process, 1995, **4**(3): 370-378.

- Abutaleb A S. Automatic thresholding of gray-level pictures using two-dimensional entropy [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1989, **47**(1): 22-32.
- Pal S K, King R A. Image enhancement using smoothing with fuzzy sets [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, Cybern, 1981, **11**(7), 494-501.
- Pal S K, King R A. On edge detection of X-ray images using fuzzy sets [J]. IEEE Transactions on PAMI, 1983, **5**(1), 69-77.
- Cheng H D, Chen J R, Li J. Threshold selection based on fuzzy c-partition entropy approach [J]. Pattern Recognition, 1998, **31**(7): 857-870.
- Sahoo P, Wilkins C, Yeager J. Threshold selection using Renyi's entropy [J]. Pattern Recognition, 1997, **30**(1): 71-84.
- Jin Li-zuo, Yuan Xiao-hui, Zhao Yi-fan, et al. Image segmentation through maximizing fuzzy partition entropy of 2-D histogram [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2002, **24**(8): 1040-1048. [金立左, 袁晓辉, 赵一凡等. 二维模糊划分最大熵图像分割算法 [J]. 电子与信息学报, 2002, **24**(8): 1040-1048.]
- Wang S T. Note on the equivalence relationship between Renyi-entropy based and Tsallis-entropy based image thresholding [J]. Pattern Recognition Letters, 2005, **26**(14): 2309-2312.
- Brink A D. Thresholding of digital images using two-dimensional entropies [J]. Pattern Recognition, 1992, **25**(8): 803-808.
- Wu X J, Zhang Y L, Xia L X. A fast recurring two-dimensional entropic thresholding algorithm [J]. Pattern Recognition, 1999, **32**(12): 2055-2061.
- Tao W B, Jin H, Liu L M. Object segmentation using ant optimization algorithm and fuzzy entropy [J]. Pattern Recognition Letters, 2007, **28**(7): 788-796.